PRAXISORIENTIERTE FORMULIERUNG VON AUFGABEN DER STATISTIK

Monika Weiss, TGM Wien

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Statistik in der technischen Praxis ist die Qualitätssicherung.

Als Instruktorin der österreichischen Vereinigung für Qualitätssicherung habe ich bereits zahlreiche Schulungen für Leute aus der Industrie durchgeführt.
Im folgenden will ich Ihnen die daraus gewonnenen didaktischen Erfahrungen, die ich auch selbst im Mathematikunterricht umsetze, darlegen.

Ich möchte Ihnen anhand der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Hypergeometrischen Verteilung und der Binomialverteilung exemplarisch zeigen, wie man den Statistikunterricht praxisnahe aufbauen kann.

1. Wozu dient Qualitätssicherung?

Im Sommer 1988 wird in den EG-Staaten das Produkthaftungsgesetz eingeführt. Österreich wird sicherlich in Kürze dem Beispiel der EG-Staaten folgen.

Das Produkthaftungsgesetz besagt, daß Firmen für die Fehlerfolgen ihrer Produkte haften, unabhängig davon, ob ein Verschulden - z.B. Fahrlässigkeit - vorliegt oder nicht.

Die einzige Möglichkeit, eine Produkthaftungsklage zurückzuweisen, besteht darin, zu beweisen, daß zum Zeitpunkt des Verkaufs der Ware, diese einwandfrei war, d.h. alle zugesicherten Eigenschaften aufgewiesen hat.
Dieser Entlastungsbeweis ist nur sehr schwer zu führen und setzt umfangreiche Prüfungen und vor allem auch eine umfassende Dokumentation voraus.

Die einzige Chance, das mit der Produkthaftung verbundene Risiko klein zu halten, besteht darin, während der Fertigung alles zu unternehmen, um Fehler beim Endprodukt zu vermeiden. Das verbleibende Restrisiko kann dann durch entsprechende Versicherungen abgedeckt werden.

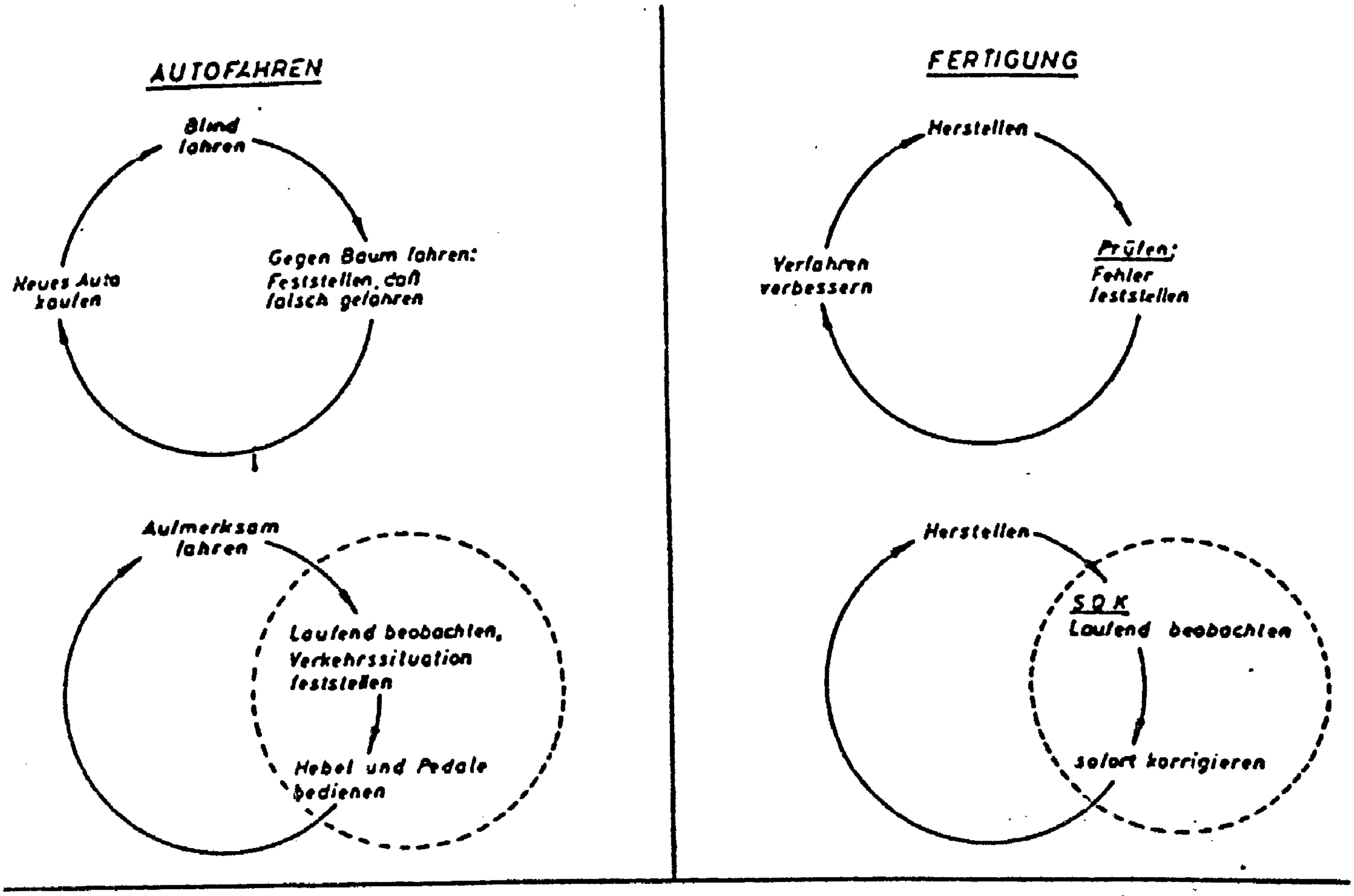
Die modernen Methoden der Qualitätssicherung verfolgen genau dieses Ziel. Mit ihrer Hilfe soll gewährleistet werden, daß die gefertigten Produkte die erforderliche Qualität aufweisen. Dabei bedeutet Qualität - in Abweichung von der umgangssprachlichen Bedeutung - die Erfüllung von vorgegebenen Erfordernissen.

Es soll nicht Glück, sondern systematische Arbeit sein, wenn am Schluß gute Produkte die Fertigung verlassen.

Das Motto lautet: Mach's gleich richtig.
und: Jeder mögliche Fehler tritt auch einmal auf.

Die Qualitätssicherung ist ein Instrument, das die Ursachen für das Auftreten von Fehlern analysiert, diese im Ansatz bekämpft und damit Fehler unmöglich machen soll - und wenn das nicht möglich oder unwirtschaftlich ist, dann soll sie zumindest die Fehlerfindung erleichtern und rechtzeitig die Fehlerbeseitigung veranlassen.

Die primäre Aufgabe der Qualitätssicherung ist es nicht, Fehler zu finden, sondern Fehler zu vermeiden.



Das Wesen der Statist. Qualitätskontrolle

Nur die systematische Planung und Steuerung der Qualität und der Qualitätssicherung im Betrieb, beginnend bei der Akquisition über Planung, Konstruktion, Einkauf, Fertigung, Prüfung, Lagerung, Transport und Kundendienst ergeben eine weitgehende Sicherheit für fehlerfreie Produkte.

Dabei ist wichtig, daß sich die Firmenleitung zur aktiven Qualitätspolitik bekennt und diese auch mitträgt.

Qualitätssicherung geht alle an.

Das Hauptziel der Qualitätssicherung ist die Vergrößerung des Gewinns.
Das kann man einerseits durch die Erhöhung des Marktanteils und andererseits durch die Reduktion der Fertigungskosten und die Preisgestaltung erreichen.

Qualität ist nicht der Aufwand des Herstellers, sondern der Nutzen des Kundens.

Der Efolg der Qualitätssicherung kann daher an der Kundenzufriedenheit gemessen werden.

Bestehende Kunden zu erhalten und neue zu gewinnen, ist die wichtigste Voraussetzung für einen lang anhaltenden Unternehmenserfolg.
Zufriedene Kunden können nur durch die Qualität der Produkte und Dienstleistungen eines Unternehmens erhalten werden, womit Qualität zum vorangigen Firmenziel wird.

Qualität ist, wenn die Kunden und nicht die Produkte zurückkommen.

Es stimmt, daß das Einführen eines Qualitätssicherungssystems erhebliche Kosten verursacht. Diese Investition rentiert sich aber rasch.

Die Firma Hewlatt-Packard hat eine Untersuchung durchgeführt, welche Kostensenkung bei einer völlig fehlerlosen Produktion erzielt werden könnten.

Unternehmensbereich	% mögliche Kostensenkung
Lager, Gewährleistung	50
Produktion, Marketing, Verwaltung	30
Forschung und Entwicklung	30

Die Produktivität könnte um ein Drittel gesteigert, der Gewinn könnte verdoppelt werden.

Natürlich ist eine völlig fehlerlose Produktion aufgrund der technischen und menschlichen Gegebnheiten nicht möglich.

Es geht darum, möglichst viel dieses Potentials, das die Qualitätssicherung bietet, zu nützen.

2. Wozu dienen statistische Methoden?

Ein spezielles Werkzeug der Qualitätssicherung sind die statistischen Methoden. Wozu dienen sie?

Die klassische Methode der Qualitätssicherung besteht darin, daß man alle Teile prüft und die fehlerhaften Teile aussortiert.
Man muß jedoch dabei berücksichtigen, daß bei dieser sogenannten 100 %-Prüfung auch Fehler übersehen werden. Bei Prüfung durch Menschen schlüpfen etwa 5 % bis 15 % der Fehler durch.

Will man z.B. bei kritischen Fehlern, durch die Menschen gefährdet werden, sichergehen, daß praktisch alle Fehler gefunden werden, so muß man die 100 %-Prüfung öfters wiederholen.

Bei zerstörender Prüfung kann man jedoch die 100 %-Prüfung nicht anwenden.

Ein Nachteil der 100 %-Prüfung besteht darin, daß sie sehr zeit- und kostenaufwendig ist.
Sie ist nur dann wirtschaftlich vertretbar, wenn die Fehlerfolgekosten der unentdeckten Fehler größer sind als die Kosten der 100 %-Prüfung.

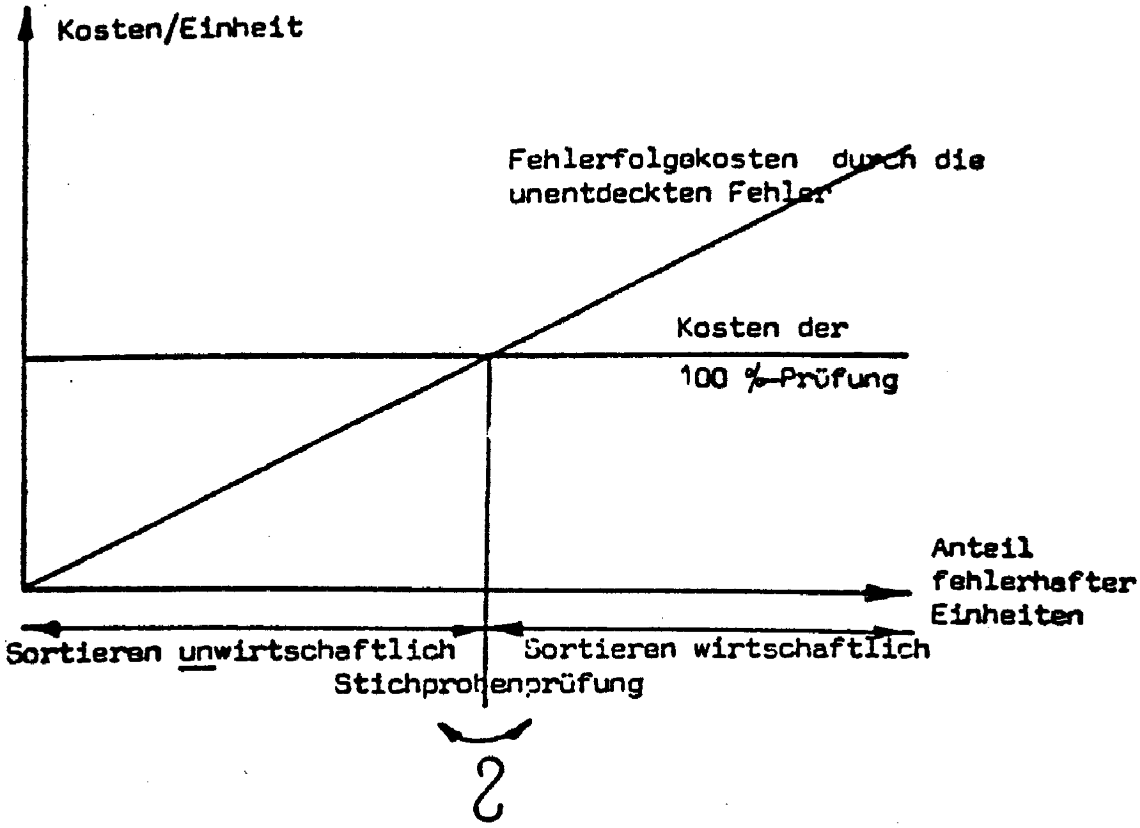
Das Problem, das dabei in der Praxis auftritt, besteht darin, daß die Fehlerfolgekosten nicht leicht erfaßbar sind.

Abgesehen davon, kennt man den Anteil fehlerhafter Teile der Produktion nicht, sodaß man nicht ohne weiteres entscheiden kann, ob es wirtschaftlicher ist, das Los zu sortieren oder nicht.

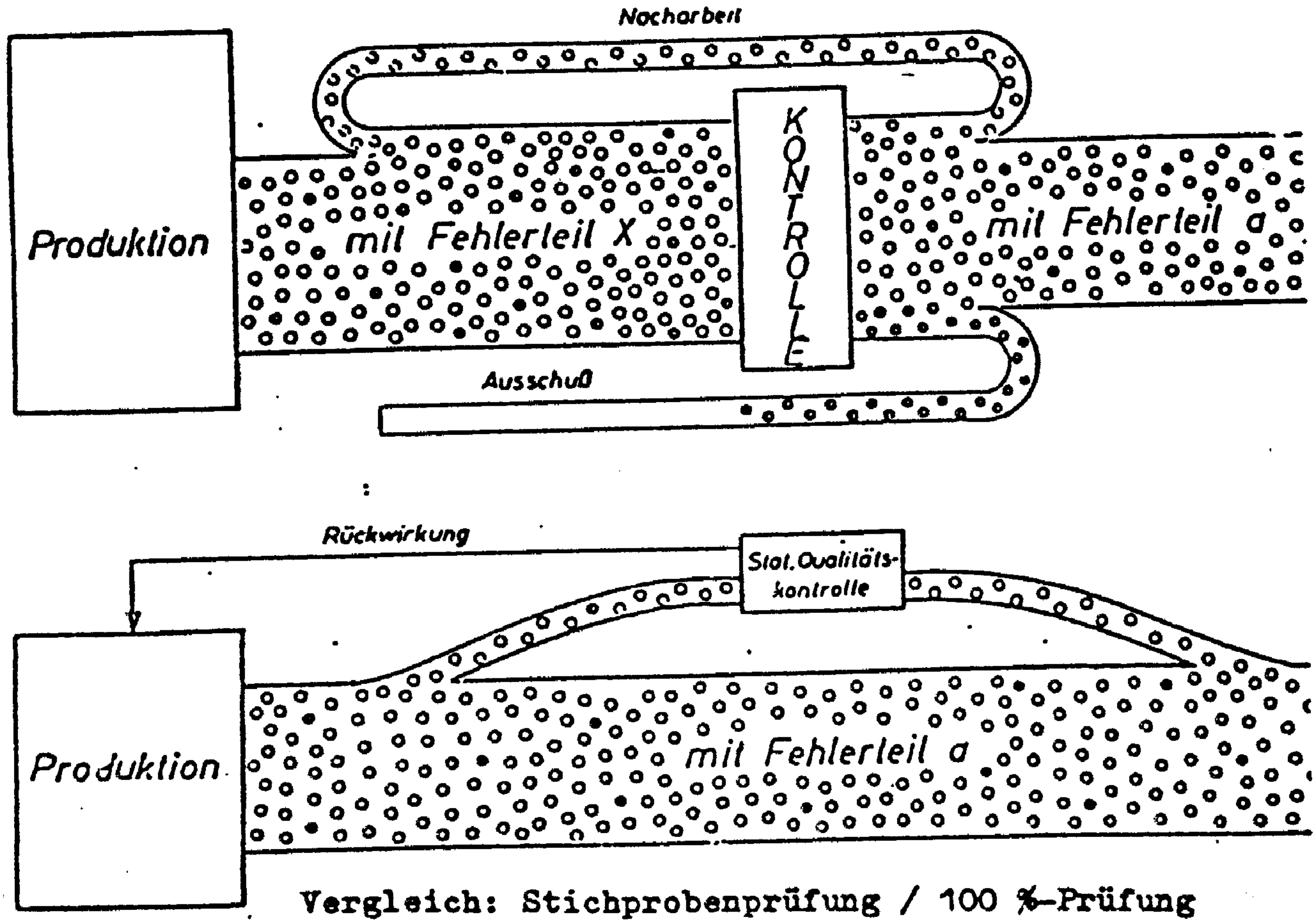
Mit Hilfe von Stichprobenprüfungen entscheidet man, ob das Los wahrscheinlich so wenige fehlerhafte Teile enthält, daß es wirtschaftlicher ist, das Los nicht zu sortieren, oder ob das Sortieren wahrscheinlich wirtschaftlicher ist.

Durch die Stichprobenprüfung wird die Qualität des Loses praktisch nicht beeinflußt. Man prüft nur einen kleinen Teil des Loses und dementsprechend findet man nur einen kleinen Teil der Fehler.

Stichprobenprüfungen sind nur ein Mittel der Steuerung und Regelung. Mit ihrer Hilfe kann man Rückschlüsse auf die Produktion ziehen. Sie zeigen zum Beispiel an, wenn qualitätsverbessernde Maßnahmen notwendig sind.



Wirtschaftlichkeit der 100 %-Prüfung



Vergleich: Stichprobenprüfung / 100 %-Prüfung

Bei der Stichprobenentnahme werden dem Los verteilt und willkürlich Teile entnommen und geprüft. Es hängt also vom Zufall ab, welche Teile geprüft werden. Dadurch hängt das Stichprobenergebnis, z.B. die gefundenene Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der Stichprobe, nicht nur von der Zusammensetzung des Loses sondern auch vom Zufall ab.

Wir sagen:
Das Stichprobenergebnis ist eine Zufallsvariable.

Wenn aus der gleichen Lieferung mehrere Stichproben gleichen Umfangs geprüft werden, so werden nicht alle Stichproben das gleiche Ergebnis liefern.

Wir sagen:
Die Stichprobenergebnisse streuen.

Wenn wir Stichprobenergebnisse interpretieren, müssen wir diese zufälligen Einflüsse stets berücksichtigen.

Mit Hilfe der Statistik soll die in der Stichprobe enthaltene Information verdichtet und veranschaulicht und dabei die Einflüsse der Produktion aus den zufälligen Einflüssen herausgefiltert werden.

Prüft man aus einem Los nicht eine einzelne Stichprobe, sondern eine ganze Serie von Stichproben, so ergibt sich eine Gesetzmäßigkeit, die nur noch sehr wenig vom Zufall abhängt.

Ein ganz bestimmter Anteil von Stichproben wird ein bestimmtes Ergebnis, z.B. eine bestimmte Anzahl von fehlerhaften Einheiten liefern. Es ergibt sich eine für dieses Los typische Häufigkeitsverteilung.

Diese kann mit Hilfe der Statistik vorhergesagt werden. Dadurch kann man das Risiko, das mit einer Stichprobenprüfung verbunden ist, genau kalkulieren. Das ist eine wesentliche Entscheidungshilfe.

3. Wahrscheinlichkeitslehre

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff lautet:

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis E eintritt, ist:

$$P(E) = g / m$$

g ... Anzahl der Fälle in denen E eintritt
m ... Anzahl der "gleichmöglichen" Fälle des Experiments

Merkregel:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}}$$

BEISPIEL
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl zu werfen?

Lösung:
Von den 6 gleichmöglichen Augenzahlen sind 3 Augenzahlen gerade.

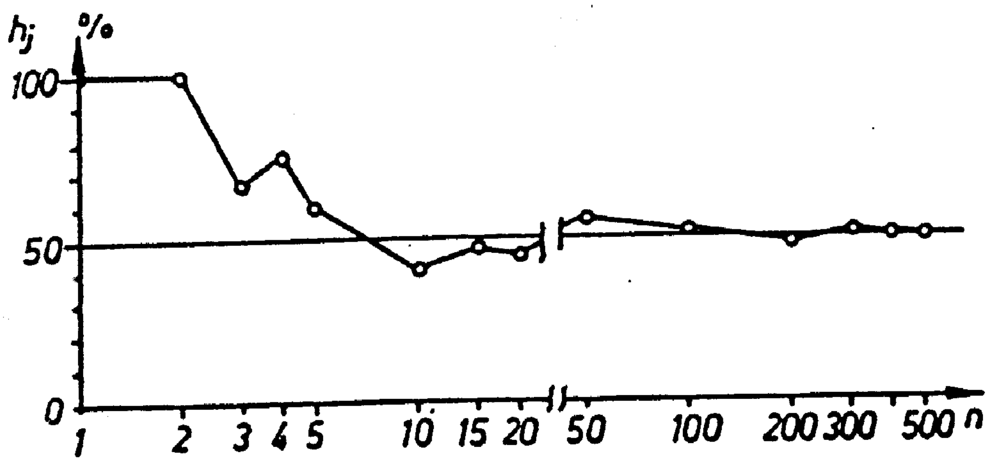
Daher gilt:
P(gerade Zahl) = 3 / 6 = 0.5

Wichtig ist, daß hier unmittelbar eine Interpretation des Ergebnisses erfolgt.

Dazu verwenden wir den statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff:

Wir wiederholen einen Versuch sehr oft und betrachten die Anzahl der Fälle, in denen ein bestimmtes Ereignis eintritt. Wir berechnen die relative Häufigkeit, das heißt wir fragen uns, in wieviel Prozent der Fälle ein bestimmtes Ereignis eingetreten ist.
Wenn wir die Anzahl n der Versuche immer mehr vergrößern, stellen wir fest, daß der Anteil h_n (der Prozentsatz) der Versuche, in denen das Ereignis eingetreten ist, schließlich nahezu gleich bleibt.

Man spricht von der Stabilität der relativen Häufigkeit und sagt, die relative Häufigkeit strebt bei größerwerdender Anzahl der Versuche der Wahrscheinlichkeit zu.



Umgekehrt können wir sagen:
Die Aussage "Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine gerade Zahl zu werfen, beträgt 0.5." heißt, wenn wir sehr oft den Würfel werfen, werden wir in etwa 50 % der Fälle eine gerade Zahl erhalten.

Je öfter wir den Würfel werfen, desto weniger wird der Anteil der geraden Zahlen von 50 % abweichen.

Voraussetzung: Der Würfel ist exakt.

Der statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff liefert somit die Grundlage, abstrakte Wahrscheinlichkeitsaussagen zu interpretieren.

Während sich die relative Häufigkeit auf konkrete Beobachtungen bezieht, kann man mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbegriffs Vorhersagen treffen.

Mit Hilfe des statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff kann man abstrakte Wahrscheinlichkeitsaussagen als Prognosen für Beobachtungen betrachten und dadurch auf festen, leichter vorstellbaren Boden holen.

BEISPIEL
Von 20 Bolzen sind 2 Bolzen defekt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß gleich bei der ersten Prüfung ein fehlerhafter Bolzen gefunden wird.

Lösung:

$$P(\text{1. Bolzen ist fehlerhaft}) = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = 2 / 20 = 0.1$$

Interpretation:
Wenn wir sehr oft vor dieser Situtation stehen, werden wir in ca. 10 % der Fälle gleich bei der ersten Prüfung einen fehlerhaften Bolzen finden.

BEISPIEL
Eine Packung enthält 5 Muttern, eine andere enthält 5 Schrauben. Jeweils eine Mutter paßt zu jeweils einer Schraube. Man entnimmt willkürlich eine Schraube und eine Mutter.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf diese Weise ein passendes Paar zu erhalten?

Lösung:
Hier ist es wichtig den richtigen Standpunkt zu beziehen, so vereinfacht sich die Aufgabe wesentlich:

Es spielt keine Rolle, welche Schraube wir ziehen.
Die Wahrscheinlichkeit, daß wir genau die zu der Schraube passende Mutter entnehmen, beträgt:

$$P = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = 1 / 5 = 0.2$$

Ansonsten hätten wir gerechnet:
Es gibt insgesamt 5*5 = 25 mögliche Kombinationen von Muttern und Schrauben.
Davon sind 5 passende Paare.

$$P = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = 5 / 25 = 0.2$$

Viele Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erfordern auch Phantasie. Daher ist dieses Kapitel bei Schülern nicht sehr beliebt.

4. Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

BEISPIEL
5 % der Bolzen haben einen zu großen Durchmesser,
10 % der Bolzen haben einen zu kleinen Durchmesser.
Ein Bolzen wird zufällig entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig entnommener Bolzen fehlerhaft ist, d.h. einen zu großen oder zu kleinen Durchmesser hat?

Lösung:
5 % + 10 % = 15 % der Bolzen haben einen zu großen oder zu kleinen Durchmesser.
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig entnommener Bolzen einen zu großen oder zu kleinen Durchmesser hat, beträgt also 15 %.

BEISPIEL
10 % der Schrauben haben ein verschnittenes Gewinde,
15 % der Schrauben haben einen zu großen Kopfdurchmesser.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig entnommene Schraube ein verschnittenes Gewinde oder einen zu großen Kopfdurchmesser hat?

Lösung:
15 % aller Schrauben haben einen zu großen Kopfdurchmesser, als auch 15 % der Schrauben mit verschnittenem Gewinde. Insgesamt haben als 15 % von 10 %, also $0.1 * 0.15 = 0.015 = 1.5$ % der Schrauben einen zu großen Kopfdurchmesser und ein verschnittenes Gewinde. Diese 1.5 % der Schrauben zählen wir doppelt, daher müssen wir sie einmal wieder abziehen.

Wir erhalten:
$P = 15 \% + 10 \% - 1.5 \% = 23.5 \%$

Der Additionssatz für einander ausschließende Ereignisse lautet:

Die Wahrscheinlichkeit, daß A oder B eintritt, wobei A und B nicht gleichzeitig eintreten können, beträgt:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$$

Beachten Sie:
Dieser Additionssatz kann ohne Schwierigkeiten auch auf mehr als 2 einander ausschließende Ereignisse angewendet werden.

Der allgemeine Additionssatz lautet:

Die Wahrscheinlichkeit, daß A <u>oder</u> B eintritt, beträgt:

P(A <u>oder</u> B) = P(A) + P(B) - P(A <u>und</u> B)

Beachten Sie:
Für mehr als 2 Ereignisse wird dieser allgemeine Additionssatz sehr kompliziert.
Man muß alle Fälle, bei denen 2 Ereignisse gleichzeitig eintreten, einmal abziehen, hat dann die, bei denen 3 Ereignisse gleichzeitig eintreten, einmal zu oft abgezogen, muß sie daher wieder dazuzählen, hat alle Fälle, bei denen 4 Ereignisse eintreten, einmal zu oft dazugezählt, muß sie daher wieder abziehen, usw.

5. Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitslehre

BEISPIEL
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen mit 2 Würfeln beide Würfel die Augenzahl 3 zeigen.

Lösung:
Jede Augenzahl des 1. Würfels kann gemeinsam mit jeder Zahl des 2. Würfels auftreten. Beim Werfen von 2 Würfeln gibt es daher 6.6 = 36 verschiedene Möglichkeiten.
Eine einzige Möglichkeit ist "günstig": (3,3)

Daher gilt:
P(1. Würfel zeigt 3 <u>und</u> 2. Würfel zeigt 3)
= 1/36 = 0.028 = 2.8 %

BEISPIEL
95 % der Geräte haben Abmessungen, die innerhalb der vorgegebenen Toleranzgrenzen liegen.
92 % der Geräte haben Funktionswerte, die innerhalb der vorgegebenen Toleranzgrenzen liegen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewähltes Gerät Abmessungen <u>und</u> Funktionswerte hat, die innerhalb der Toleranzgrenzen liegen?

Lösung:
92 % aller Geräte haben Funktionswerte innerhalb der Toleranzgrenzen, also auch 92 % der 95 % Geräte mit Abmessungen innerhalb der Toleranzgrenzen.
92 % von 95 % also 0.95 . 0.92 = 0.874 = 87.4 % der Geräte haben Abmessungen <u>und</u> Funktionswerte innerhalb der Toleranzgrenzen.

Daher gilt:
P(Abmessungen <u>und</u> Funktionswerte innerhalb der Toleranz)= 0.95 . 0.92 = 0.874 = 87.4 %

Der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung lautet:

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Ereignisse A <u>und</u> B eintreten, wobei A und B einander nicht beeinflussen, beträgt:

$$P(A \text{ \underline{und} } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bemerkungen:

1. Die Ereignisse A und B beeinflussen einander nicht, wenn das Eintreten von A weder das Eintreten von B begünstigt noch benachteiligt und umgekehrt.

   In der Praxis ist diese Voraussetzung nicht immer leicht überprüfbar.
   Es ist zum Beispiel denkbar, daß eine zu kleine Abmessung des Geräts die Funktion beeinträchtigt.

2. Der Multiplikationssatz läßt sich ohne Schwierigkeiten auf mehr als 2 Ereignisse verallgemeinern.

3. Bei der <u>UND</u>-Verknüpfung von 2 Ereignissen multiplizieren sich die Anzahlen der Möglichkeiten und daher auch die Wahrscheinlichkeiten.

BEISPIEL
Bei der Fertigung von Geräten treten folgende Anteile von Geräten mit Fehlern auf:

5 % der Geräte haben den Fehler A
10 % der Geräte haben den Fehler B
20 % der Geräte haben den Fehler C
8 % der Geräte haben den Fehler D

Die Fehler beeinflussen einander nicht.
Wie groß ist der Anteil der Geräte, die
a) alle vier Fehler aufweisen?
b) mindestens einen Fehler aufweisen?

Lösung:
a) Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gerät alle vier Fehler, das heißt den Fehler A <u>und</u> B <u>und</u> C <u>und</u> D, aufweist, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für jeweils einen Fehler.
P(alle vier Fehler) = 0.05 . 0.1 . 0.2 . 0.08 = 0.00008
= 0.008 %
Das heißt etwa 80 von einer Million Geräten haben alle 4 Fehler.

b) Es ist sehr kompliziert, die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, daß ein Gerät den Fehler A oder B oder C oder D oder mehrere dieser Fehler aufweist.

Ein Gerät hat genau dann mindestens einen Fehler, wenn es nicht keinen Fehler aufweist.

Wir berechnen daher zunächst die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gerät keinen Fehler aufweist, das heißt nicht den Fehler A und nicht B und nicht C und nicht D.

P(Gerät hat keinen Fehler) = 0.95 . 0.90 . 0.80 . 0.92
= 0.629 = 62.9 %.

62.9 % der Geräte haben keinen der vier Fehler.
Daher haben 37.1 % der Geräte mindestens einen Fehler.

Wir sagen:
Das Ereignis "ein Gerät hat keinen Fehler" ist komplementär zum Ereignis "ein Gerät hat mindestens einen Fehler".

Allgemein definieren wir:
Das Ereignis B heißt zum Ereignis A komplementär, wenn B genau dann eintritt, wenn A nicht eintritt.

Es gilt dann auch automatisch, daß A komplementär zu B ist. Wir können daher dann auch sagen, daß A und B komplementäre Ereignisse sind.

BEISPIEL
Ein bestimmtes Bauteil wird mit einem Anteil von 0.1 % fehlerhaften Teilen geliefert.
In ein Gerät werden 30 dieser Bauteile eingebaut.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gerät nur fehlerfreie Bauteile enthält?

Lösung:
P(alle Bauteile funktionieren) = 0.999^{30} = 0.974
97,4 % der Geräte enthalten 30 fehlerfreie Bauteile.

BEISPIEL
Eine Printplatte enthält 1000 Bauteile. Die Wahrscheinlichkeit, daß nicht alle 1000 Bauteile funktionieren soll höchstens 2 % betragen.
Welche Ausfallswahrscheinlichkeit darf ein einzelnes Bauteil höchstens haben?

Lösung:
Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bauteil funktioniert mit P_1.
Dann gilt:
P(alle Bauteile funktionieren) = $P_1^{1000} >= 0.98$

Wir erhalten:
$P_1 = \sqrt[1000]{0.98} = 0.99998$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bauteil ausfällt, darf daher höchstens $0.00002 = 20 \cdot 10^{-6} = 20$ ppm sein.

ppm ist die Abkürzung für parts per million und ist die z.B. in der Elektronikindustrie übliche Einheit für den Anteil fehlerhafter Einheiten.

Bemerkung:
Eines der Probleme der Elektronikindustrie ist die große Stückzahl von in einem Gerät eingebauten Bauteilen.
Da die Wahrscheinlichkeit, daß alle Bauteile eines Gerätes funktionieren relativ klein ist, müssen die Geräte redundant gebaut werden: d.h. nicht alle Bauteile sind für den Betrieb notwendig. Bei Ausfall eines Bauteils übernimmt ein anderes Bauteil dessen Funktion.

BEISPIEL
In einer Signalanlage sind 3 Glühlampen eingebaut. Die Signalanlage funktioniert, wenn mindestens eine Glühlampe funktioniert. Jede einzelne Glühlampe überlebt das Wartungsintervall von einem halben Jahr mit 90 %iger Wahrscheinlichkeit.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Signalanlage während des ganzen Wartungsintervalls funktioniert?

b) Wie viele Glühlampen müßte man in die Signalanlage einbauen, damit die Wahrscheinlichkeit, daß die Signalanlage während des Wartungsintervalls ausfällt höchstens 10 ppm ist?

Lösung:
a) Die Signalanlage funtioniert, wenn die erste oder die zweite oder die dritte oder zwei der drei oder alle drei Glühlampen funktionieren.
Wir rechnen daher einfacher die Wahrscheinlichkeit aus, daß die Signalanlage ausfällt.
Die Signalanlage fällt aus, wenn die erste und die zweite und die dritte Glühlampe ausfällt.
Wir rechnen daher mit dem Multiplikationssatz.

P(alle drei Glühlampen fallen aus) $= 0.1^3 = 0.001 = 0.1$ %

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Signalanlage während des ganzen Wartungsintervalls funktioniert, beträgt daher 99.9%

b) Wir bezeichnen die Anzahl der Glühlampen mit n.
Die Wahrscheinlichkeit, daß alle n Glühlampen ausfallen, beträgt 0.1^n und soll kleiner als 10 ppm sein.

Wir erhalten die Exponentialungleichung:
$0.1^n <= 0.00001$
Wir erkennen sofort, daß diese Ungleichung für n >= 5 erfüllt ist.
Man muß daher mindestens 5 Glühlampen in die Signalanlage einbauen.

BEISPIEL
Bei der 100 % Prüfung werden 15 % der Fehler übersehen.
Daher wird die Prüfung ein 2. Mal durchgeführt.
Wieder werden 15 % der noch verhandenen Fehler übersehen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Prüfung übersehen wird?

Lösung:
P(Fehler wird bei der 1. und bei der 2. Prüfung übersehen) = 0.15 . 0.15 = 0.0225 = 2.25 %.

BEISPIEL
Bei jeder Prüfung werden 5 % der Fehler übersehen.
Wie oft muß die Prüfung durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler bei allen Prüfungen übersehen wird, höchstens 0.001 % beträgt?

Lösung:
Wir bezeichnen die Anzahl der Prüfungen mit m.
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler bei der 1. und bei der 2. ... und bei der m-ten Prüfung übersehen wird, beträgt 0.05^m.

Wir erhalten die Exponentialgleichung:
$0.05^m <= 0.00001$
$m . \ln(0.05) <= \ln(0.00001)$
$m >= \ln(0.00001)/\ln(0.05)$
$m >= 3.84$

Man muß die Prüfung mindesten viermal durchführen.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

BEISPIEL
Eine Packung von 20 Teilen enthält vier fehlerhafte Teile. Aus dieser Packungen werden 5 Teile willkürlich entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man dabei

a) kein
b) genau 1
c) genau 2
d) genau 3
e) genau 4
f) genau 5
g) höchstens 1
h) höchstens 2
i) höchstens 3
j) höchstens 4
k) höchstens 5

fehlerhafte Teile entnimmt.

Lösung:
Folgende Bezeichnungen sind üblich:
N ... Umfang der Grundgesamtheit
d ... Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der Grundgesamtheit
n ... Stichprobenumfang
x ... Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der Stichprobe

N, d und n sind bekannte Parameter.
x ist eine Zufallsvariable, das ist eine Variable, bei der es vom Zufall abhängt, welchen Wert sie annimmt.

In unserem Beispiel gilt:
N = 20
d = 4
n = 5

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß x, die Anzahl der fehlerhaften Einheiten in der Stichprobe, 0 ist, d.h. die 1. und die 2. und die 3. und die 4. und die 5. entnommene Einheit fehlerfrei ist.

Da von den 20 Einheiten 16 Einheiten fehlerfrei sind (4 Einheiten sind fehlerhaft), beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß die erste entnommene Einheit fehlerhaft ist, 16/20.

Nach der Entnahme der ersten fehlerfreien Einheit sind nur noch 19 Einheiten in der Grundgesamtheit, von denen 15 fehlerfrei sind.
Die Wahrscheinlichkeit, daß die erste und die zweite entnommene Einheit fehlerfrei ist, beträgt daher
16/20 . 15/19

Wir erhalten durch analoge Überlegungen:
P(x=0) = 16/20 . 15/19 . 14/18 . 13/17 . 12/16 = 0.2817

b) Die Wahrscheinlichkeit, daß die erste entnommene Einheit fehlerhaft und die 2. und 3. und 4. und 5. Einheit fehlerfrei ist, beträgt
P(1. Einheit fehlerhaft, übrige Einheiten fehlerhaft) =
4/20 . 16/19 . 15/18 . 14/17 . 13/16 = 0.0939

Gesucht ist jedoch die Wahrscheinlichkeit, daß die 1. oder die 2. oder die 3. oder die 4. oder die 5. Einheit fehlerhaft ist und jeweils die anderen fehlerfrei.

P(2. Einheit fehlerhaft, übrige Einheiten fehlerfrei) =
16/20 . 4/19 . 15/18 . 14/17 . 13/16 = 0.0939

Obwohl die zweite Wahrscheinlichkeit durch die Multiplikation anderer Brüche entstanden ist wie die erste, sind natürlich beide Wahrscheinlichkeiten gleich groß.

Ingesamt gibt es 5 verschiedene Möglichkeiten, daß genau eine Einheit fehlerhaft und die übrigen fehlerfrei sind.

X O O O O
O X O O O
O O X O O
O O O X O
O O O O X

Die 5 entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß, nämlich 0.0939.

Daher erhalten wir:
P(x=1) = 5 . 0.0939 = 0.4695

c) Wir müssen zunächst abzählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, zwei fehlerhafte Einheiten unter 5 Einheiten anzuordnen:

X X O O O	O X X O O	O O X X O	O O O X X
X O X O O	O X O X O	O O X O X	
X O O X O	O X O O X		
X O O O X			

Es gibt also 10 Möglichkeiten, die 2 fehlerhaften Einheiten unter den 5 Einheiten anzuordnen.

Daher erhalten wir:
P(x=2) = 10 . 4/20 . 3/19 . 16/18 . 15/17 . 14/16 = 0.2167

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es 3 fehlerhafte Einheiten unter 5 Einheiten anzuordnen?
Aus der Skizze in c) ist ersichtlich, daß es wieder 10 Möglichkeiten gibt: Wir müssen nur die Interpretation von O und X vertauschen.

Daher erhalten wir:
P(x=3) = 10 . 4/20 . 3/19 . 2/18 . 16/17 . 15/16 = 0.0310

e) Es gibt 5 Möglichkeiten, 4 fehlerhafte Einheiten unter 5 Einheiten anzuordnen: Die erste oder die 2. oder die 3. oder die 4. oder die 5. Einheit kann fehlerhaft sein.

Wir erhalten:
P(x=4) = 5 . 4/20 . 3/19 . 2/18 . 1/17 . 16/16 = 0.0010

f) Da insgesamt nur 4 fehlerhafte Einheiten in der Packung sind, können unmöglich alle 5 Einheiten der Stichprobe fehlerhaft sein.
Daher gilt: P(x=5) = 0

Bemerkungen:
1. Die Entnahme der Einheiten erfolgt - wie in der Praxis so gut wie immer - nach dem Prinzip des "Ziehens ohne Zurücklegen".
Dadurch verändert sich die Zusammensetzung der Grundgesamtheit während der Stichprobenentnahme.

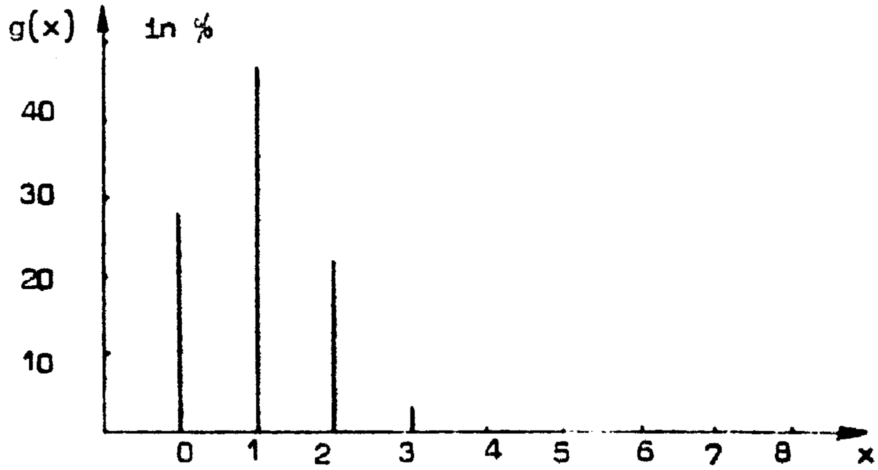
2. Wir erkennen, daß die Wahrscheinlichkeit, genau x fehlerhafte Einheiten in der Stichprobe zu finden, eine Funktion von x ist. Wir nennen diese Funktion Wahrscheinlichkeitsfunktion und bezeichnen sie mit g.
g(x) ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe genau x fehlerhafte Einheiten zu finden.

Für unser Beispiel gilt:
g(0) = 0.2817
g(1) = 0.4696
g(2) = 0.2167
g(3) = 0.0310
g(4) = 0.0010
g(5) = 0

Interpretation:
Wenn wir versuchsweise immer wieder 5 Einheiten der Packung entnehmen, die Stichprobe auswerten, zurücklegen und danach die nächsten 5 Einheiten entnehmen, werden etwa 28 % diesser Stichproben keine, 47 % genau 1, 22 % genau 2, 3 % genau 3 und 0.1 % genau 4 fehlerhafte Einheiten enthalten.

Wir können die Wahrscheinlichkeitsfunktion in einem Stabdiagramm darstellen.

Wir erhalten:



Interpretation:
Die Gesamtwahrscheinlichkeit (= Summe der Stabhöhen) von 1 verteilt sich auf die einzelnen x-Werte.

Wir sprechen daher von einer "Wahrscheinlichkeits-verteilung".

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung stellt die Prognose einer Häufigkeitsverteilung dar:

Wenn wir tatsächlich sehr viele Stichproben wie oben beschrieben entnähmen und auswerteten, erhielten wir eine Häufigkeitsverteilung, die etwa der oben dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung entspräche.

Wir wollen nun die Fragen g) bis k) lösen:

g) "höchstens 1 fehlerhafte Einheit" bedeutet "0 oder 1 fehlerhafte Einheit".

Daher erhalten wir:

$$P(x \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = g(0) + g(1) = 0.2817 + 0.4696$$
$$= 0.7513 = 75.13\ \%$$

h) $P(x \le 2) = g(0) + g(1) + g(2) = 0.2817 + 0.4696 + 0.2167$
$$= 0.9680 = 96.8\ \%$$

i) $P(x \le 3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3)$
$$= 0.2817 + 0.4696 + 0.2167 + 0.0310$$
$$= 0.9990 = 99.9\ \%$$

j) $P(x \le 4) = 0.2817 + 0.4696 + 0.2167 + 0.0310 + 0.0010$
$$= 1 = 100\ \%$$

Das heißt, daß alle möglichen Stichproben höchstens 4 fehlerhafte Einheiten (es gibt ja nur 4 fehlerhafte Einheiten in der Grundgesamtheit) enthalten.

h) Wenn alle möglichen Stichproben höchstens 4 fehlerhafte Einheiten enthalten, enthalten klarerweise auch alle möglichen Stichproben höchstens 5 fehlerhafte Einheiten.

Daher gilt:
$P(x \le 5) = 1$

Bemerkungen:

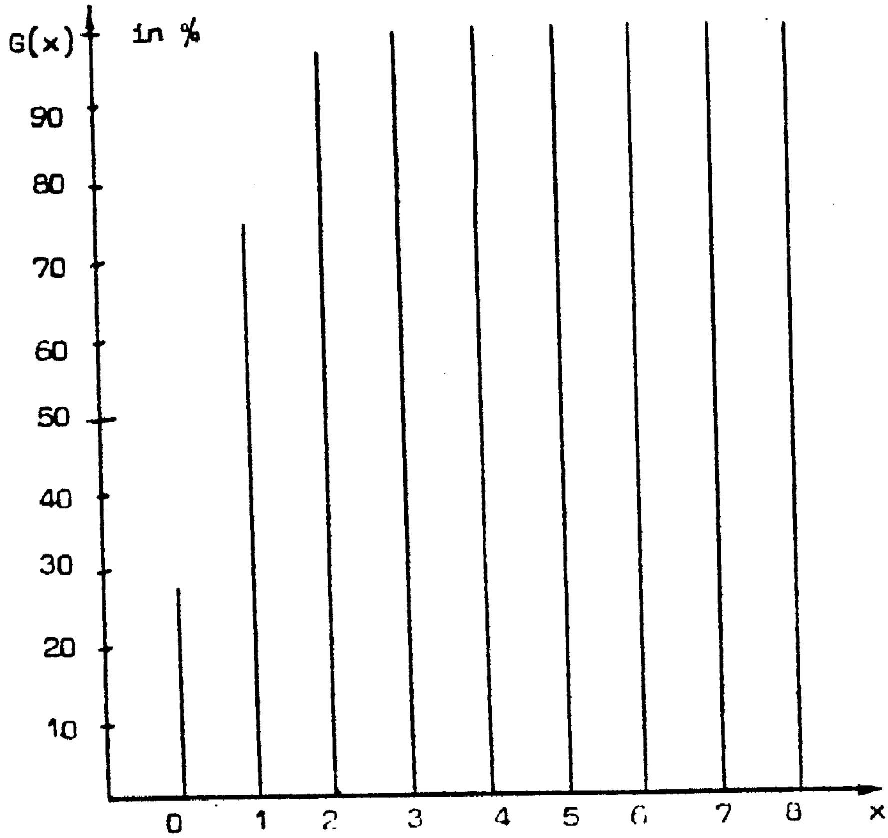
1. Für die Praxis ist die Frage nach der maximalen Anzahl fehlerhafter Einheiten in einer Stichprobe oft von entscheidender Bedeutung; z.B. bei der Frage, ob eine Lieferung den Anforderungen entspricht oder der Frage, ob die Fertigung sich verschlechtert hat.

2. Wir erkennen, daß auch die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe höchstens x fehlerhafte Einheiten zu finden, eine Funktion von x ist. Diese Funktion heißt <u>Verteilungsfunktion</u> und wird mit G bezeichnet.
   <u>G(x)</u> ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe <u>höchstens</u> x fehlerhafte Einheiten zu finden.

   Für unser Beispiel gilt:
   G(0) = 0.2817
   G(1) = 0.7513
   G(2) = 0.9680
   G(3) = 0.9990
   G(4) = 1
   G(5) = 1

   Interpretation:
   Wenn wir versuchsweise immer wieder 5 Einheiten der Packung entnehmen, die Stichprobe auswerten, zurücklegen und danach die nächsten 5 Einheiten entnehmen, werden etwa 28 % diesser Stichproben <u>höchstens</u> 0, 75 % <u>höchstens</u> 1, 97 % <u>höchstens</u> 2, 99.9 % <u>höchstens</u> 3 und alle <u>höchstens</u> 4 fehlerhafte Einheiten enthalten.

   Wir können auch G(x) in einem Stabdiagramm darstellen.



Beachten Sie:
Dem Addieren der Funktionswerte g(x) entspricht das Übereinandertürmen der Stäbe der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

7. Hypergeometrische Verteilung

Wir konnten die Funktionswerte der Wahrscheinlichkeitsfunktion durch systematisches Auflisten und Abzählen der Möglichkeiten mit Hilfe des Multiplikationssatzes und des Additionssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnen.

Dieser Vorgang ist jedoch sehr aufwendig, besonders wenn die Losgröße und der Stichprobenumfang groß sind.
Wir suchen daher nach einer systematischen Methode zur Berechnung von g(x).

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge von r Elementen k Elemente auszuwählen beträgt $\binom{r}{k}$.

$\binom{r}{k}$ heißt Binomialkoeffizient.

Wenn wir ein Los von N Elementen mit d fehlerhaften betrachten und daraus eine Stichprobe von n Einheiten entnehmen, die x fehlerhafte Einheiten enthalten soll, so gibt es

$\binom{d}{x}$ Möglichkeiten, aus den d fehlerhaften Einheiten der Grundgesamtheit x fehlerhafte Einheiten auszuwählen, die in die Stichprobe gelangen
und
$\binom{N-d}{n-x}$ Möglichkeiten, aus den N-d fehlerfreien Einheiten der Grundgesamtheit n-x fehlerfreie Einheiten auszuwählen, die in die Stichprobe gelangen.

Jede der Möglichkeiten, x fehlerhafte Einheiten aus den d fehlerhaften Einheiten der Grundgesamtheit auszuwählen, ergibt mit jeder der Möglichkeiten, n-x fehlerfreie Einheiten aus den N-d fehlerfreien Einheiten der Grundgesamtheit auszuwählen, eine Möglichkeit, aus den N Elementen der Grundgesamtheit eine Stichprobe von n Einheiten auszuwählen, die genau x fehlerhafte Einheiten enthält.

Daher gibt es $\binom{d}{x} \cdot \binom{N-d}{n-x}$ "günstige Möglichkeiten".

Insgesamt gibt es $\binom{N}{n}$ Möglichkeiten, aus den N Einheiten der Grundgesamtheit n Einheiten der Stichprobe auszuwählen.

Wir erhalten:

$$g(x) = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}} = \frac{\binom{d}{x} \binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Das ist die Formel der Hypergeometrischen Verteilung.
N, d und n sind die Parameter der Hypergeometrischen Verteilung.
x ist eine Zufallsvariable.

Mit dieser Formel können wir voraussagen, wieviel Prozent der möglichen Stichproben genau x fehlerhafte Einheiten enthalten.

Es gilt:
$G(0) = g(0)$
$G(x) = g(0) + g(1) + \dots + g(x) = \quad g(i)$

Wir erhalten also die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe höchstens x fehlerhafte Einheiten zu finden, durch Aufsummieren der Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion g(x).

Für die Gültigkeit der Formel der Hypergeometrischen Verteilung müssen wir nur voraussetzen, daß die Stichprobe zufällig entnommen wurde:
Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Einheit in die Stichprobe gelangt, muß für alle Einheiten der Grundgesamtheit gleich groß sein.

Merkregel:

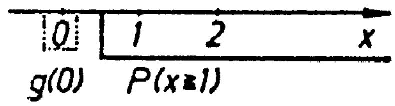
$$g(x) = \frac{\binom{\text{SCHLECHT}}{\text{schlecht}} \cdot \binom{\text{GUT}}{\text{gut}}}{\binom{\text{GRUNDGESAMTHEIT}}{\text{Stichprobe}}}$$

BEISPIEL
Eine 50er-Packung enthält 5 fehlerhafte Einheiten.
Dieser Packung wird eine Stichprobe von 5 Einheiten entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Stichprobe
a) kein fehlerhaftes Stück
b) mindestens ein fehlerhaftes Stück
c) weniger als zwei fehlerhafte Stücke
enthält?

Lösung:
N = 50
d = 5
n = 5

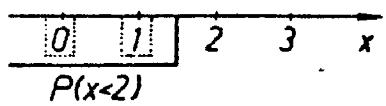
a) $P(x=0) = g(0) = \dfrac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{1 \cdot 1221759}{2118760} = 0.5766 = 57.66\ \%$

b) $P(x>=1) = 1 - P(x<1) = 1 - g(0) = 1 - 0.5766$
$= 0.4234 = 42.34\ \%$



c) $P(x<2) = P(x<=1) = G(1) = g(0) + g(1)$

$g(1) = \dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{45}{4}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{5 \cdot 148995}{2118760} = 0.3516$



$P(x<2) = 0.5766 + 0.3516 = 0.9282 = 92.82\ \%$

BEISPIEL
Von 8 gefertigten Printplatten sind 4 fehlerhaft.
5 Printplatten werden zufällig entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß keine, bzw. eine, bzw. zwei, ... bzw. alle fünf Printplatten fehlerhaft sind?

Lösung:
N = 8
d = 4
n = 5

Es gibt nur 8 - 4 = 4 fehlerfreie Printplatten. Die Wahrscheinlichkeit, daß keine der fünf Printplatten fehlerhaft ist, beträgt daher 0.

$P(x=0) = g(0) = 0$
$P(x=1) = g(1) = 0.0714$
$P(x=2) = g(2) = 0.4286$
$P(x=3) = g(3) = 0.4286$
$P(x=4) = g(4) = 0.0714$

Es gibt nur 4 fehlerhafte Printplatten. Die Wahrscheinlichkeit, daß alle fünf Printplatten fehlerhaft sind, beträgt daher 0.

$P(x=5) = g(5) = 0$

Beachten Sie:
Da die Hälfte der 8 Printplatten fehlerhaft und die andere Hälfte fehlerfrei ist, ist in diesem speziellen Fall die Hypergeometrische Verteilung symmetrisch.

BEISPIEL
Ein Los mit $p = 10\ \%$ fehlerhaften Einheiten enthält 80 Einheiten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe von 15 Stücken

a) kein fehlerhaftes Stück
b) genau ein fehlerhaftes Stück
c) mehr als ein fehlerhaftes Stück
d) mindestens ein fehlerhaftes Stück

zu finden?

Lösung:
$N = 80$
$d = 10\ \%$ von $80 = 80 \cdot 0.1 = 8$
$n = 15$

a) $P(x=0) = g(0) = 0.1741 = 17.41\ \%$
b) $P(x=1) = g(1) = 0.3603 = 36.03\ \%$
c) $P(x>1) = 1 - P(x<=1) = 1 - G(1) = 1 - (g(0) + g(1)) =$
$1 - 0.1741 - 0.3603 = 0.4656 = 46.56\ \%$
d) $P(x>=1) = 1 - P(x<1) = 1 - g(0) = 1 - 0.1741$
$= 0.8259 = 82.59\ \%$

8. Binomialverteilung

Bei der Hypergeometrischen Verteilung haben wir berücksichtigt, daß sich die Zusammensetzung des Loses während der Stichprobenentnahme ändert. (Ziehen ohne Zurücklegen).

Würden wir vor der Entnahme des 2. Teiles das 1. geprüfte Teil in die Grundgesamtheit zurücklegen usw., so bliebe der Anteil fehlerhafter Einheiten in der Grundgesamtheit während der Stichprobenentnahme konstant. (Ziehen mit Zurücklegen)

Für die Praxis ist es jedoch undenkbar, daß ein gefundenes fehlerhaftes Teil in die Grundgesamtheit zurückgelegt wird. Bei zerstörender Prüfung ist es sogar unmöglich.

Wenn wir allerdings ein großes Los haben und daraus eine relativ kleine Stichprobe entnehmen, so können wir die Veränderung der Grundgesamtheit durch die Stichprobenentnahme vernachlässigen.

Es spielt zum Beispiel fast keine Rolle, ob von 10000 Teilen 100 Teile fehlerhaft sind oder von 9999 Teilen 100 Teile oder von 9999 Teilen 99 Teile fehlerhaft sind.
Der Anteil fehlerhafter Einheiten ist in allen 3 Fällen ungefähr 0,01 oder 1 %.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein entnommenes Teil fehlerhaft ist, beträgt daher immer 0.01 oder 1 %. Wir müssen nicht berücksichtigen, ob vorher bereits Teile entnommen wurden und ob diese fehlerhaft oder fehlerfrei waren.

Wir bezeichnen den Anteil fehlerhafter Einheiten in der Grundgesamtheit mit p.

Es gilt: $p = d / N$

q ist der Anteil fehlerfreier Einheiten in der Grundgesamtheit.

Es gilt: $q = 1 - p$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine entnommene Einheit fehlerhaft ist, beträgt demnach p; die Wahrscheinlichkeit, daß sie fehlerfrei ist, beträgt q.

BEISPIEL
Ein Los von 10000 Einheiten enthält etwa 100 fehlerhafte Einheiten.
Aus diesem Los werden 20 Einheiten geprüft.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Stichprobe
a) keine
b) genau 1 e) höchstens 1
c) genau 2 f) höchstens 2
d) genau 3 g) höchstens 3
fehlerhafte Einheit enthält?

Lösung:
$N = 10000$
$d = 100$ $p = d / N = 100 / 10000 = 0.01$
$n = 20$

a) Die Stichprobe enthält genau dann keine fehlerhafte Einheit, wenn die 1. <u>und</u> die 2. <u>und</u> ... <u>und</u> die 20. Einheit fehlerfrei ist.
Die Wahrscheinlichkeit, daß eine entnommene Einheit fehlerfrei ist, beträgt $q = 0.99$.
Mit Hilfe des Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhalten wir:
$P(x=0) = q^n = 0.99^{20} = 0.8197 = 81.97$ %

b) Die Wahrscheinlichkeit, daß die erste entnommene Einheit fehlerhaft ist <u>und</u> die übrigen 19 Einheiten der Stichprobe fehlerfrei sind, beträgt:
P(1. fehlerhaft <u>und</u> die übrigen fehlerfrei) $= p \cdot q^{n-1} = 0.01 \cdot 0.99^{19} = 0.0083$
Es kann jedoch auch die 2. <u>oder</u> die 3. <u>oder</u> ... <u>oder</u> die 20. Einheit der Stichprobe fehlerhaft und jeweils die übrigen fehlerfrei sein.
Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß und betragen jeweils 0.0083.

Daher erhalten wir mit dem Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
$P(x=1) = g(1) = 20 \cdot 0.0083 = 0.1652 = 16.52$ %

Allgemein gilt:
$g(1) = n \cdot p \cdot q^{n-1}$

c) Die Wahrscheinlichkeit, daß die ersten beiden Einheiten der Stichprobe fehlerhaft <u>und</u> die übrigen Einheiten der Stichprobe fehlerfrei sind beträgt:
P(1.<u>und</u>2. Einheit fehlerhaft, übrige Einheiten fehlerfrei)
$= p^2 \cdot q^{n-2} = 0.01^2 \cdot 0.99^{18} = 0.0000835$

Es können jedoch auch die 1. und die 3. ... <u>oder</u> die 1. und die 20. <u>oder</u> die 2. und die 3. ... <u>oder</u> die 2. und die 20. ... <u>oder</u> die 19. und die 20. Einheit fehlerhaft und jeweils die übrigen Einheiten fehlerfrei sein.

Es gibt insgesamt $\binom{20}{2}$ Möglichkeiten, die 2 fehlerhaften Einheiten in einer Stichprobe des Umfangs 20 anzuordnen.

Daher erhalten wir:

$$P(x=2) = g(2) = \binom{20}{2} \cdot 0.0000835 = 0.0159 = 1.59\ \%$$

Allgemein gilt:

$$g(2) = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$$

d) Es gibt $\binom{20}{3}$ Möglichkeiten, 3 fehlerhafte Einheiten in einer Stichprobe von 20 Einheiten anzuordnen.
Daher erhalten wir:

$$P(x=3) = g(3) = \binom{20}{3} \cdot 0.01^3 \cdot 0.99^{17} = 0.0010 = 0.1\ \%$$

Algemein gilt:

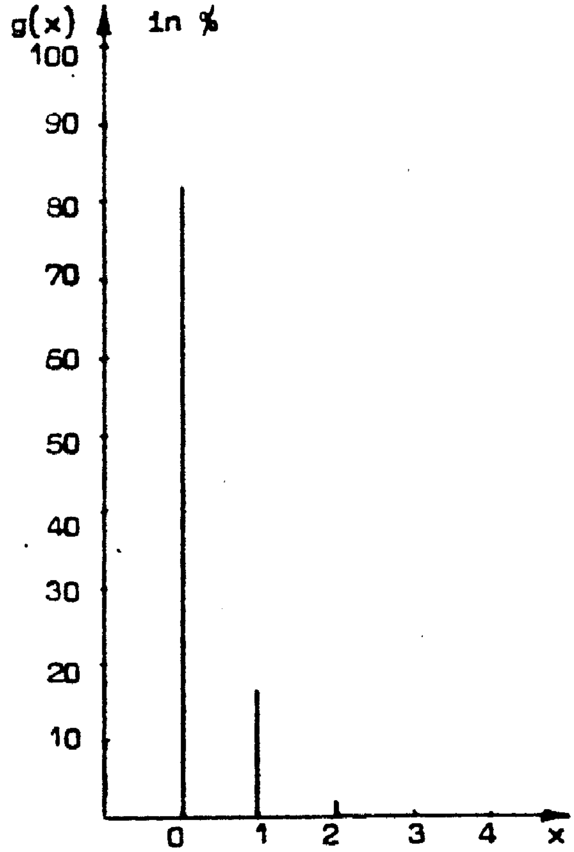
$$g(3) = \binom{n}{3} \cdot p^3 \cdot q^{n-3}$$

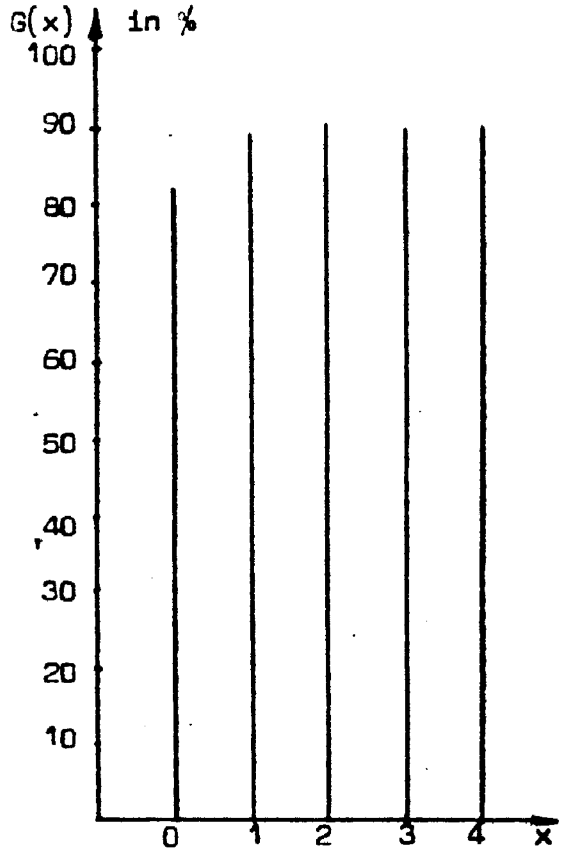
e) Die Stichprobe enthält genau dann höchstens 1 fehlerhafte Einheit, wenn sie keine <u>oder</u> genau 1 fehlerhafte Einheit enthält.
Mit dem Additionssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhalten wir:
$P(x \leq 1) = G(1) = g(0) + g(1) = 0.8179 + 0.1652$
$= 0.9831 = 98.31$ %

f) $P(x \leq 2) = G(2) = g(0) + g(1) + g(2) =$
$0.8179 + 0.1652 + 0.0159 = 0.9990 = 99.9$ %

g) $P(x \leq 3) = G(3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) =$
$0.8179 + 0.1652 + 0.0159 + 0.0010 = 1 = 100$ %

Wir haben damit die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion berechnet. Wir können sie wiederum als Stabdiagramme darstellen.





Die allgemeine Formel der Binomialverteilung lautet:

$$g(x) = \binom{n}{x} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$

Merkregel:

$$g(x) = \binom{\text{Stichprobe}}{\text{schlecht}} \cdot \text{SCHLECHT}^{\text{schlecht}} \cdot \text{GUT}^{\text{gut}}$$

Beachten Sie:
Die Binomialverteilung ist durch nur 2 Parameter, nämlich p und n bestimmt.
Man kann sie daher leichter berechnen und tabellieren.
In der Praxis existieren genormte Stichprobenumfänge (n = 2, 3, 5, 8, 13, 20, 32, 50, 80, 125, 200, 315, 500), die bevorzugt verwendet werden.

In vielen Tabellenwerke (z.B. SCHÄRF : Funktionen- und Zahlentafeln für den Mathematikunterricht, 14. Auflage erschienen im R.Oldenbourg Verlag, Wien 1987) findet man Tabellen der Binomialverteilung für diese genormten Stichprobenumfänge für einige Werte von p.

Die Binomialverteilung darf immer dann als Näherung für die Hypergeometrische Verteilung verwendet werden, wenn sich die Zusammensetzung der Grundgesamtheit durch die Stichprobenentnahme - praktsich - nicht ändert.

Für die Praxis gilt die Faustregel:
großes Los: $N >= 50$
und relativ kleine Stichprobe: $n <= N/10$

Beachten Sie:
In den meisten Tabellen ist die Verteilungsfunktion $G(x)$ tabelliert, also die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe <u>höchstens</u> x fehlerhafte Einheiten zu finden.
Alle anderen Fragestellungen müssen wir mit Hilfe des Additionssatzes und komplementärer Ereignisse auf $G(x)$ zurückführen.

Es gilt: $g(0) = G(0)$ und
$g(x) = G(x) - G(x-1)$

Bei der Berechnung verwenden wir die Formel von der Wahrscheinlichkeitsfunktion $g(x)$, also der Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe <u>genau</u> x fehlerhafte Einheiten zu finden.
Alle anderen Fragestellungen müssen wir wiederum mit Hilfe des Additionssatzes und komplementärer Ereignisse aus $g(x)$ zurückführen.

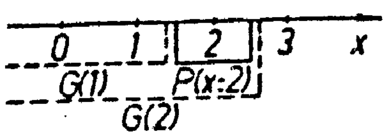
Es gilt: $G(0) = g(0)$ und
$$G(x) = g(0) + g(1) + \ldots + g(x) = \sum_{i=0}^{x} g(i)$$

BEISPIEL
Die Tagesfertigung eines Massenartikels enthält 8 % fehlerhafte Teile.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe von 80 Teilen
a) genau 3
b) höchstens 3
c) weniger als 3
d) mindestens 3
e) mehr als 3
fehlerhafte Teile zu finden?

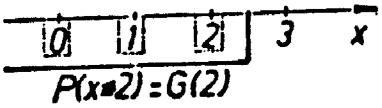
Lösung:
Da von einem "Massenartikel" die Rede ist, dürfen wir annehmen, daß die Grundgesamtheit mindestens zehnmal so groß wie die Stichprobe ist, also mindestens 800 Teile enthält.
Daher dürfen wir die Binomialverteilung verwenden.

$p = 0.08$
$n = 80$

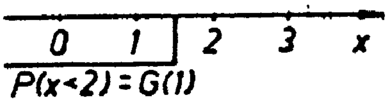
a) $P(x=2) = g(2) = G(2) - G(1) = 0.0303 = 3.03$ %



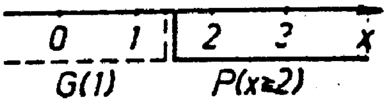
b) $P(x<=2) = G(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 0.0404 = 4.04\ \%$



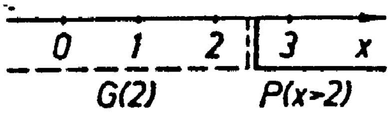
c) $P(x<2) = G(1) = g(0) + g(1) = 0.0101 = 1.01\ \%$



d) $P(x>=2) = 1 - G(1) = 1 - (g(0) + g(1)) = 1 - 0.0101 =$
$0.9899 = 98.99\ \%$



e) $P(x>2) = 1 - G(2) = 1 - (g(0) + g(1) + g(2)) = 1 - 0.0404$
$= 0.9596 = 95.96\ \%$



Interpretation:
Wenn wir von diesem Massenarteikel sehr viele Stichproben vom Umfang 80 entnehmen, so werden etwa 3.03 % der Stichproben genau 2 fehlerhafte Einheiten enthalten, etwa 4.04 % werden höchstens 2, also keine, eine oder zwei fehlerhafte Einheiten enthalten, 1.01 % werden weniger als 2, nämlich keine oder eine fehlerhafte Einheit enthalten, 98.99 % werden mindestens 2, also 2 oder mehr fehlerhafte Einheiten enthalten, von diesen enthalten 95.96 % mehr als 2 fehlerhafte Einheiten.

BEISPIEL
Es ist bekannt, daß bei der Produktion von 40 000 Teilen etwa 800 fehlerhafte Teile entstehen.
Eine Packung enthält 200 Stücke.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Packung mehr als 3 fehlerhafte Teile enthält?

Lösung:
Der Losumfang ist sowohl größer als 50 als auch größer als das Zehnfache des Stichprobenumfangs. Daher dürfen wir mit der Binomialverteilung rechnen.

$p = d / N = 800 / 40000 = 0.02$
Die Packung entspricht der Stichprobe.
$n = 200$

$P(x>3) = 1 - G(3) = 1 - (g(0) + g(1) + g(2) + g(3))$
$= 1 - 0.4315 = 0.5685 = 56.85\ \%$

Interpretation:
Etwa 56.85 % der 200 Stück-Packungen dieses Massenartikels enthalten mehr als 3 fehlerhafte Einheiten.

Beachten Sie:
Für die Entscheidung, ob die Hypergeometrische Verteilung oder die Binomialverteilung verwendet werden soll, ist nicht ausschlaggebend, welche Parameter gegeben sind, sondern nur, ob die Näherungsbedingungen erfüllt sind.

BEISPIEL
Es wurde berechnet, daß nach 5 Jahren 20 % der Geräte ausgefallen sein werden.[1]
Ein Abnehmer bezieht 20 Geräte.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 5 Jahren noch mindestens 18 Geräte funktionieren?

Lösung:
Die ausgefallenen Geräte sind fehlerhaft.
Daher gilt: $p = 0.2$
$n = 20$
Wenn mindestens 18 von 20 Geräten funktionieren sollen, dürfen höchstens 2 Geräte ausfallen.
Wir rechnen:
$P(x<=2) = G(2) = 0.206 = 20.6\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach 5 Jahren noch mindestens 18 von 20 Geräten funktionieren werden, beträgt 20.6 %.

BEISPIEL
Ein Samen ist im Mittel zu 99.5 % keimfähig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 1000 ausgesäten Samen mindestens 995 keimfähig sind?

Lösung:
0.5 % der Samen sind nicht keimfähig, also "fehlerhaft".
Daher: $p = 0.005$
Die 1000 ausgesäten Samen sind die Stichprobe.
Daher: $n = 1000$
Wenn mindestens 995 von 1000 Samen keimfähig sein sollen, so dürfen höchstens 5 Samen nicht keimfähig sein.

$P(x<=5) = G(5) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) = 0.6160 = 61.6\ \%$

BEISPIEL
Ein Prüfungsbogen enthält 10 Fragen. Zu jeder Frage gibt es vier mögliche Antworten, von denen genau eine richtig ist.
Ein Kandidat wählt die Antworten willkürlich aus.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens die Hälfte der Fragen richtig beantwortet hat?

[1] Derartige Berechnungen hat die Verfasserin in "Anwendung der Exponentialfunktion in der Zuverlässigkeitsprüfung" im Jahresband 1986 der österreichischen Mathematischen Gesellschaft veröffentlicht.

Lösung:
Auch hier liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable, nämlich die Anzahl der richtigen (oder die der falschen) Antworten, vor.
Es gilt: p = 3/4 = 0.75
(3 von 4 möglichen Anworten sind "fehlerhaft".)
"mindestens die Hälfte der Fragen richtig" heißt, daß höchstens 5 Fragen falsch beantwortet sein dürfen.

P(x<=5) = G(5) = g(0) + g(1) + g(2 + g(39 + g(4) + g(5) = 0.0781 = 7.81 %

Interpretation:
Wenn sehr viele Schüler diese Prüfung willkürlich lösen, so werden von diesen Schülern nur etwa 8 % , also etwa 1 von 13 Schülern mindestens die Hälfte der Fragen richtig beantworten.

Eine sehr wichtige Anwendung der Binomialverteilung in der Routinearbeit der Qualitätssicherung ist die Annahmestichprobenprüfung.

9. Annahmestichprobenprüfung

Mit Hilfe der Annahmestichprobenprüfung soll entschieden werden, ob ein Los die gewünschte Qualität aufweist.
Sie wird hauptsächlich bei der Wareneingangsprüfung und bei der Warenendprüfung verwendet.

Ein Lieferant weiß z.B., daß seine Fertigung etwa 1 % fehlerhafte Teile enthält. Es würde erhebliche Kosten verursachen, wollte er die fehlerhaften Teile aussortieren.

Der Abnehmer ist bereit, diese Losqualität zu akzeptieren, behält sich aber vor, alle während der Stichprobenprüfung oder während der Fertigung gefundenen fehlerhaften Teile zu reklamieren.

Er wünscht jedoch einen Schutz gegen Lose mit einem größeren Anteil fehlerhafter Einheiten, weil sonst das Aussortieren der fehlerhaften Teile in der Fertigung eine zu große Zeitverzögerung darstellt.

Mit Hilfe einer Stichprobenprüfung soll entschieden werden, ob das angelieferten Los die Anforderung erfüllt oder nicht, ob das Los angenommen werden kann oder zurückgewiesen werden muß.

Bei der Einfachstichprobenanweisung wird der Stichprobenumfang vereinbart. Zusätzlich gibt man an, wie viele fehlerhafte Einheiten, in der Stichprobe maximal gefunden werden dürfen, damit das Los noch angenommen werden kann.

Die Stichprobenanweisung 50 - 1 bedeutet, daß man 50 Teile prüfen muß. Findet man dabei höchstens 1 fehlerhafte Einheit, so wird das Los angenommen, ansonsten wird es zurückgewiesen.

Die allgemeine Form ist n - c.
n heißt Stichprobenumfang und c ist die Annahmezahl.

Es hängt nicht nur von der Losqualität, sondern auch vom Zufall ab, wie viele fehlerhafte Teile man in der Stichprobe findet.
Daher hängt es auch vom Zufall ab, ob ein Los angenommen oder zurückgewiesen wird. Je besser die Losqualität ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Los angenommen wird.

Mit Hilfe der Binomialverteilung kann die Annahmewahrscheinlichkeit P_a, d.h. die Wahrscheinlichkeit, höchstens c fehlerhafte Einheiten zu finden, in Abhängigkeit vom Anteil der fehlerhaften Einheiten im Los und der Stichprobenanweisung berechnet werden.

Es gilt: $P_a = G(c)$
Dabei ist G die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit den Parametern p, dem Anteil der fehlerhaften Einheiten im Los, und n, dem vereinbarten Stichprobenumfang.

Die Annahmestichprobenprüfung ist nicht sehr gut geeignet zur Beurteilung einzelner Lose. Besteht jedoch eine längerfristige Handelsbeziehung zwischen Hersteller und Abnehmer, so sind sie ein geeignetes Werkzeug.

Der Hersteller wird im eigenen Interesse äußerst bemüht sein, nur solche Lose zu liefern, deren Qualität dem vereinbarten Niveau entspricht, da sonst ein erheblicher Anteil seiner Lose nicht angenommen würde.

Die Stichprobenprüfung ist daher nur eine Präventivmaßnahme gegen einzelne schlechte Lose. Der Abnehmer darf begründet vertrauen, daß so gut wie alle Lose den vereinbarten Bedingungen entsprechen.

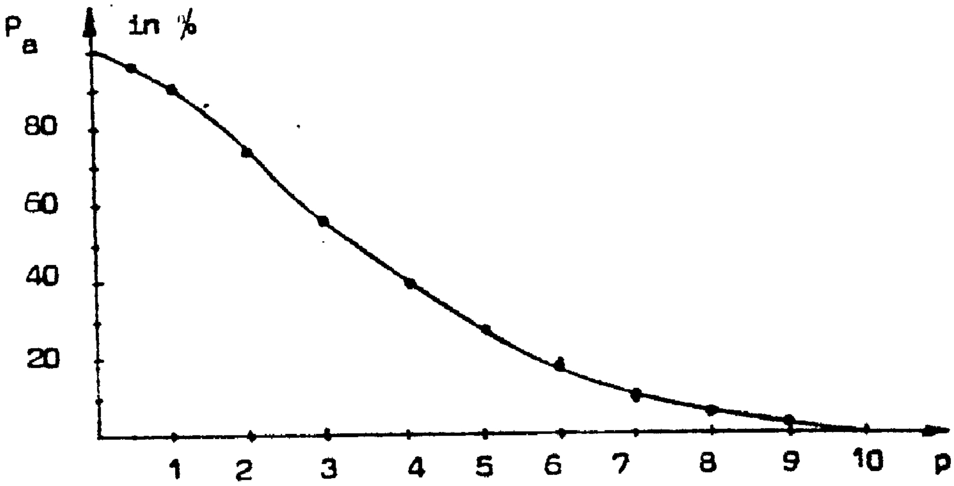
Mit Hilfe der Statistik kann das mit der Annahmestichprobenprüfung verbundene Risiko kalkuliert werden. Mittels der Binomialverteilung kann man die Annahmewahrscheinlichkeit P_a, d.h. die Wahrscheinlichkeit, höchstens c fehlerhafte Einheiten zu finden, in Abhängigkeit vom Anteil der fehlerhaften Einheiten im Los und der Stichprobenanweisung berechnen.

Die Operationscharakteristik ist die graphische Darstellung der Annahmewahrscheinlichkeit P_a in Abhängigkeit vom Anteil p fehlerhafter Einheiten im Los.

BEISPIEL
Bestimmen Sie die Operationscharakteristik der Stichprobenanweisung 50 - 1.

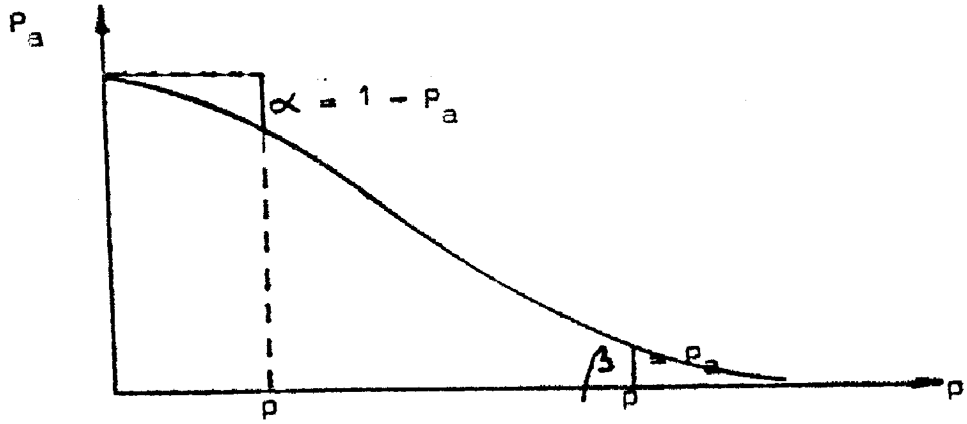
Lösung:
$n = 50$
$P_a = G(1)$
Wir berechnen die Annahmewahrscheinlichkeit mittels der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung mit p und $n = 50$.
Wir wählen die Werte von p so, daß die Annahmewahrscheinlichkeit etwa zwischen 95 % und 5 % variiert.

p	P_a
0.005	0.974
0.01	0.911
0.02	0.736
0.03	0.555
0.04	0.400
0.05	0.279
0.06	0.190
0.07	0.126
0.08	0.083
0.09	0.053
0.1	0.034



Interpretation:
Wenn sehr viele Lose geliefert werden, die jeweils 0.5 % fehlerhafte Einheiten enthalten, so werden etwa 97 % dieser Lose angenommen werden, während bei 3 % der Lose in den Stichproben zufällig mehr als 1 fehlerhafte Einheit gefunden wird, sodaß das Los zurückgewiesen wird, obwohl es nur wenige fehlerhafte Einheiten enthält.

Enthalten die Lose 10 % fehlerhafte Einheiten, so werden immerhin trotzdem 3,4 % der Lose angenommen, weil in den Stichproben jeweils zufällig höchstens 1 fehlerhafte Einheit gefunden wurden. Und das obwohl nun die Lose zwanzigmal so viele fehlerhafte Einheiten enthalten wie im ersten Fall!



α ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gutes Los zurückgewiesen wird. Es heißt Herstellerrisiko.
β ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein schlechtes Los nicht zurückgewiesen wird. Es heißt Verbraucherrisiko.

Beide Risken können verkleinert werden, wenn man den Stichprobenumfang erhöht. Dabei treten dann allerdings höhere Prüfkosten auf.

Lieferant und Abnehmer müssen durch Verhandeln versuchen, eine Stichprobenanweisung zu finden, bei der die Risken und die Prüfkosten für beide akzeptabel sind. Entscheidend für die Auswahl einer Stichprobenanweisung sind wirtschaftliche Gesichtspunkte.

In der Praxis geht man so vor, daß man vertraglich den sogenannten AQL-Wert vereinbart.
AQL (acceptable quality level) heißt annehmbare Qualitätsgrenzlage.
Lose, deren Anteil fehlerhafter Einheiten nicht größer als AQL ist, sollen mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

In Tabellen z.B. ÖNORM A 6649 kann man in Abhängigkeit von der Losgröße und dem vereinbarten AQL eine geeignete, genormte Stichprobenanweisung ablesen.

In "SCHÄRF: Funktionen- und Zahlentafeln für den Mathematikunterricht, Oldenbourgverlag" finden Sie eine für den schulischen Gebrauch geeignete Auswahl von Stichprobenanweisungen der ÖNORM A 6649. (siehe nächste Seite)

In der ÖNORM A 6649 findet man außerdem die Operationscharkateristiken der genormten Stichprobenanweisungen.
So können Hersteller und Abnehmer, das mit der vereinbarten Stichprobenprüfung verbundene Risiko kalkulieren.

BEISPIEL
Ein Lieferant liefert täglich 10 000 Gummiteile. Der Abnehmer schreibt AQL = 0.65 vor.

a) Nach welcher Stichprobenanweisung prüft der Abnehmer?

b) Der Lieferant weiß, daß seine Lose etwa 0.5 % fehlerhafte Teile enthalten.
Wie groß ist die Annahmewahrscheinlichkeit für diese Lose?

c) Manchmal kann durch Inhomogenitäten des Ausgangsmaterials der Anteil fehlerhafter Einheiten bis zu 1 % betragen.
Wie groß ist für diese Lose das Lieferantenrisiko?

d) Der Abnehmer will Lose mit einem Anteil fehlerhafter Einhetien von mehr als 1.5 % nicht akzeptieren.
Wie groß ist die Rückweisewahrscheinlichkeit für Lose mit 1.5 % fehlerhafter Einheiten?

e) Wenn der Anteil fehlerhafter Gummiteile größer als 3 % ist, treten beim Abnehmer Engpässe in der Fertigung auf.
Wie groß ist das Abnehmerrisiko für Lose mit 3 % fehlerhaften Einheiten?

Lösung:

a) Für AQL = 0.65 und N = 10000 entnehmen wir der öNORM:
$n - c/d = 200 - 2/3$
d ist die Rückweisezahl.
Ist die Anzahl fehlerhafter Einheiten größer oder gleich d, so wird das Los zurückgewiesen.
Die Rückweisezahl bietet keinerlei neue Information. Daher kann sie auch weggelassen werden.
$n - c = 200 - 2$

b) $p = 0.005$
$n = 200$

$P_a = G(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 0.9202$

Interpretation:
Der Lieferant muß damit rechnen, daß etwa 8 von 100 Losen zurückgewiesen werden. Liefert er pro Monat etwa 25 Lose, so muß er ca. alle 4 Monate mit einem zurückgewiesenen Los rechnen.

c) $p = 0.01$
$n = 200$

$\alpha = 1 - P_a = 1 - G(2) = 1 - 0.6767 = 0.3233 = 32.33\ \%$

Interpretation:
Von diesen "Ausreißerlosen" wird etwa jedes dritte zurückgewiesen. Ob dieses Lieferantenrisiko tragbar ist, hängt davon ab, wie oft solche schlechten Lose beim Lieferanten auftreten und welche Konsequenzen ein zurückgewiesenes Los mit sich bringt.

d) $p = 0.015$
$n = 200$

$1 - P_a = 1 - G(2) = 1 - 0.4215 = 0.5785 = 57.58\ \%$

Interpretation:
Nur etwa jedes zweite der Lose mit 1.5 % fehlerhaften Einheiten wird zurückgewiesen. Es scheint also, daß der Abnehmer unzureichend von derartigen Losen geschützt ist.

Andererseits kann sich kein Lieferant leisten, daß die Annahmewahrscheinlichkeit kleiner als 50 % ist. Der Image- und Vertrauensverlust, der mit einem zurückgewiesenen Los verbunden ist, ist viel zu groß.
Der Abnehmer darf daher vertrauen, daß der Lieferant, der weiterhin täglich 10 000 Gummiteile an den Abnehmer verkaufen will, im eigenen Interesse alles tun wird, um derartige Lose zu vermeiden.

e) $p = 0.03$
$n = 200$

$$\beta = P_a = G(2) = 0.0593$$

Interpretation:
Sollte der Lieferant tatsächlich Lose mit einem Anteil fehlerhafter Einheiten von 3 % senden, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß derart schlechte Lose nicht zurückgewiesen werden, 5.93 %. Es gelangt also nur etwa jedes 20. derart schlechter Lose in die Fertigung.

Mit Hilfe der Statistik können Lieferant und Abnehmer, das mit der Stichprobenanweisung verbundene Risiko kalkulieren. Die Frage, ob eine Stichprobenanweisung geeignet ist, kann hingegen die Statistik alleine nicht beantworten.

Mit Hilfe der Statistik kann man berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein bestimmtes Los aufgrund der Stichprobenanweisung angenommen wird. Welche Konsequenzen eine Rückweisung eines Loses mit sich zieht und welche Stichprobenumfänge wirtschaftlich vertretbar sind, ergeben sich aus der konkreten Situation des Lieferanten-Abnehmer-Verhältnisses.

Dabei spielen wirtschaftliche und technologische Aspekte, die Gegebenheiten des Marktes in Bezug auf Kunden und Konkurrenten, Fragen der Firmenpolitik und des Marketings und nicht zuletzt das Verhandlunggeschick eine wesentliche Rolle.

Grundsätzlich kann man sagen:
Die Statistik nimmt dem Anwender keine Entscheidung ab. Sie bietet aber eine sachliche Grundlage für Entscheidungen.